JOURNAL OF ALGEBRA 18, 213–228 (1971)

Le spectre à gauche d'un anneau

NICOLAE POPESCU

Institutul de Matematică, Academia R.S.R.
Strada Griviţei Nr. 21, Bucureşti 12, Romania

Communicated by P. M. Cohn

Received March 9, 1970

INTRODUCTION

La notion de premier (à gauche) pour un anneau A (avec élément identité) a été introduite par Goldman [3], en utilisant une technique qui ne diffère que formellement de la technique de la localisation introduite par Gabriel [2]. Soit A un anneau (avec élément identité); alors les sous-catégories localisantes de Mod A (la catégorie des modules à gauche unitaires sur A) sont parfaitement déterminées par les catégories des quotients de Mod A tel que le foncteur canonique a un adjoint à droite [2, ch. III]. Pour introduire la notion de "premier", Goldman utilise les sous-catégories localisantes de Mod A (ou "Kernel functor" selon sa terminologie); dans ce travail nous proposons une autre définition de la notion de "premier" qui ne diffère que formellement de la notion introduite par Goldman, mais plus simples en constructions, selon notre opinion.

Le travail a trois parties. Dans la première partie, on donne des définitions et notions fondamentales, particulièrement on caractérise le système localisant (à gauche) déterminé par un idéal à gauche (proposition 1.1).

Dans la deuxième partie on donne la définition du premier à gauche pour un anneau A (avec élément identité). Le théorème 2.3 de cette partie permet d'identifier les premiers à gauche et le théorème 2.8 établit une liaison entre les premiers à gauche et quelques idéaux à gauche de A. Le théorème 2.10 montre l'analogie existente entre le concept de premier à gauche et le concept d'idéal premier dans le cas commutatif: l'anneau d'intégrité "résiduel" associé et son corps des quotients. Le théorème 2.11 caractérise des A-modules des définitions pour un premier à gauche de A; une telle caractérisation fait la liaison entre ma définition et la définition de Goldman [3].

Dans la troisième partie, on applique des résultats ci-après aux anneaux noethériens à gauche. Ici on montre que les premiers à gauche de A (noethérien à gauche) sont déterminés par les injectifs indécomposables de Mod A

(voir [2, ch. II pour la notion d'injectif indécomposable]). Comme une conséquence on obtient le théorème d'Akizuki pour le cas non-commutatif. Le théorème d'Akizuki est énoncé pour le cas commutatif [10, ch. IV]; mon énoncé est complètement analogue en utilisant la notion de "premier" à gauche (théorème 3.2). Le théorème 3.3 caractérise les A-modules co-primaires (primaires selon Goldman). Selon notre opinion la vraie notion pour la théorie de décomposition est la notion d'idéal quasi-primaire; nous montrons que pour le cas commutatif noethérien cette notion coïncide avec la notion d'idéal primaire; on donne à cette occasion une nouvelle démonstration plus simple du théorème 6.11 de [3].

1. Définitions

Tous les anneaux considérés ont un élément identité non nul; les morphismes des anneaux sont unitaires. Tous les modules sont (sauf la mention contraire) unitaires et à gauche. Soit A un anneau; par Mod A on note la catégorie des modules à gauche (unitaires) sur A. Soit X un A-module, X' un sous-module de X et x un élément de X; on note par $\{X' : x\}$ l'ensemble des éléments a de A tels que $ax \in X'$. Particulièrement si 0 est le sous-module nul de X, on note $\{0 : x\} = \text{Ann}(x)$, c'est-à-dire l'annulateur de x. Évidemment $\{X' : x\}$ est un idéal à gauche de A.

Soit A un anneau. Nous appellerons *système localisant* à gauche sur A un ensemble F des idéaux à gauche de A, non vide, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, des idéaux à gauche de A, tel que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a} \in F$; alors $\mathfrak{a}' \in F$.

(2) Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in F$, alors $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \in F$.

(3) Si $\mathfrak{a} \in F$ et $x \in A$, alors $\{\mathfrak{a} : x\} \in F$.

(4) Soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ des idéaux à gauche de A tel que $\mathfrak{a} \in F$. Si pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\{\mathfrak{a}' : x\} \in F$, alors $\mathfrak{a}' \in F$.

La notion de système localisant (à gauche) sur A coïncide avec la notion de système topologisant et idempotent des idéaux à gauche sur A définie par Gabriel [2, Ch. V]. Nous considérons plus adéquate la terminologie de "système localisant".

Nous notons par $\mathscr{G}(A)$ l'ensemble des systèmes localisants à gauche sur A. Évidemment $\mathscr{G}(A)$ n'est pas vide et relativement à l'inclusion c'est un ensemble ordonné. Évidemment l'intersection (ensembliste) d'un ensemble d'éléments de $\mathscr{G}(A)$ est encore un élément de $\mathscr{G}(A)$. $\mathscr{G}(A)$ est un treille complet.

Soit $\mathscr{F}$ une sous-catégorie pleine de Mod A; on dit [2, Ch. III] que $\mathscr{F}$ est une sous-catégorie localisante si les assertions suivantes sont remplies:

(a) Si dans la suite exacte des A-modules:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

$X \in \mathscr{F}$, alors, $X', X'' \in \mathscr{F}$ et inversement.

(b) Si $(X_i)_{i \in I}$ est un ensemble d'objects de $\mathscr{F}$, alors $\coprod_i X_i \in \mathscr{F}$ ($\coprod$ est la somme directe des modules).

Soit $F \in \mathscr{G}(A)$; notons par $\mathscr{F}$ la sous-catégorie pleine de Mod A formée des A-modules X tel que pour tout $x \in X$, $\mathrm{Ann}(x) \in F$. Alors $\mathscr{F}$ est une sous-catégorie localisante de Mod A, et la fonction $F \rightsquigarrow \mathscr{F}$ est une bijection de $\mathscr{G}(A)$ sur l'ensemble des sous-catégories localisantes de Mod A [2, Ch. V, 2].

Soit $F \in \mathscr{G}(A)$ et $X \in \mathrm{Mod}\, A$; on dit que X est *F-fermé* si pour tout $\mathfrak{a} \in F$ et tout morphisme des A-modules $f : \mathfrak{a} \to X$ il existe un unique morphisme des A-modules $f : A \to X$ en prolongeant f. Nous notons par $\mathscr{C}(F)$ la sous-catégorie pleine de Mod A formée par tous les A-modules F-fermés, par $S_F : \mathscr{C}(F) \to \mathrm{Mod}\, A$ le foncteur inclusion et par T_F un adjoint à gauche, exacte de S_F [2, Ch. III]. On dit que T_F est le foncteur canonique; nous considérons de façon tacite les foncteurs T_F et S_F.

On considère toujours que $T_F \circ S_F$ est le foncteur identique de $\mathscr{C}(F)$. De même on note par $\psi(F) : \mathrm{Id\, Mod}\, A \to S_F \circ T_F$ une flêche d'adjonction. Nous utiliserons de façon libre des résultats de [2, Ch. III et V].

Soit X un A-module; on note par $E(X)$ l'enveloppe injective de X et par $F(X)$ l'ensemble des idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E(X)) = 0$. Évidemment $F(X)$ est un élément de $\mathscr{G}(A)$ et pour tout $F \in \mathscr{G}(A)$ il existe un objet X de Mod A tel que $F = F(X)$ (par exemple un cogénérateur de $\mathscr{C}(F)$ considéré de façon canonique dans Mod A).

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A; on note $F(A/\mathfrak{a}) = F_{\mathfrak{a}}$.

PROPOSITION 1.1. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de l'anneau A. Alors $F_{\mathfrak{a}}$ est formé par les idéaux à gauche $\mathfrak{b}$ de A tels que pour tout $x_1 \notin \mathfrak{a}$, $x_2 \in A$ il existe $y \in A$ de façon que $yx_1 \notin \mathfrak{a}$ et $yx_2 \in \mathfrak{b}$.*

Démonstration. Soit Q l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} \in F_{\mathfrak{a}}$; alors $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, Q) = 0$. Soit x_1, x_2 des éléments de A tels que $x_1 \notin \mathfrak{a}$; nous admettons que pour tout $x \in A$ tel que $xx_2 \in \mathfrak{b}$, on déduit $xx_1 \in \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $\{\mathfrak{b} : x_2\} \subseteq \{\mathfrak{a} : x_1\}$. Mais alors il existe le morphisme canonique non nul (on suppose $x_2 \notin \mathfrak{b}$) $f : A/\{\mathfrak{b} : x_2\} \to A/\{\mathfrak{a} : x_1\}$. Mais $A/\{\mathfrak{a} : x_1\}$ est un sous-module de $A/\mathfrak{a}$. La contradiction est évidente.

Inversément, soit $\mathfrak{b}$ un idéal à gauche de A en vérifiant l'hypothèse de l'énoncé; si $\mathfrak{b} \notin F_\mathfrak{a}$ alors il existe un morphisme non nul des A-modules $f : A/\mathfrak{b} \to Q$.

Soit $x_2 \in A$ tel que $\bar{x}_2$ (l'image canonique de x_2 dans $A/\mathfrak{b}$) est non nul et tel que $0 \neq f(\bar{x}_2) \in A/\mathfrak{a}$, c'est-à-dire il existe $x_1 \in A$ ainsi que $\bar{x}_1 = f(\bar{x}_2)$ ($\bar{x}_1$ sera l'image canonique de x_1 dans $A/\mathfrak{a}$). Mais alors il existe $x \in A$ tel que $xx_1 \notin \mathfrak{a}$ et $xx_2 \in \mathfrak{b}$, donc $xf(\bar{x}_2) = f(\bar{x}\bar{x}_2) = \bar{x}\bar{x}_1 = 0$. Contradiction.

Observation. Si $\mathfrak{a} = 0$ (l'idéal nul de A) alors F_0 est l'ensemble des idéaux denses à gauche de A (voir [5, pag. 96]).

COROLLAIRE 1.2. *Soit A un anneau commutatif et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors $F_\mathfrak{a}$ est formé par tous les idéaux $\mathfrak{b}$ de A tel que pour tout $x \in A$ de façon que $\mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{a}$, alors $x \in \mathfrak{a}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{b} \in F_\mathfrak{a}$ et $x \in A$ tel que $\mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{a}$; si $x \notin \mathfrak{a}$ alors conformément à la proposition ci-dessus on déduit qu'il existe $y \in A$ tel que $yx \notin \mathfrak{a}$ et $y \in \mathfrak{b}$. Contradiction.

Inversement, si $\mathfrak{b}$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé et $\mathfrak{b} \notin F_\mathfrak{a}$ alors il existe $x_1 \notin \mathfrak{a}$ et x_2 éléments de A tels que $\{\mathfrak{b} : x_2\} \subseteq \{\mathfrak{a} : x_1\}$, conformément à la proposition ci-dessus. Mais alors $\mathfrak{b} \subseteq \{\mathfrak{b} : x_2\}$ donc, $\mathfrak{b}x_1 \subseteq \mathfrak{a}$. Contradiction.

Soit $F \in \mathscr{G}(A)$ et X un A-module tel que $F(X) = F$; on dit alors que X est un *module de définition* pour F; évidemment, un module de définition pour F n'est pas unique. S'il existe un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A tel que $F_\mathfrak{a} = F$, on dit que $\mathfrak{a}$ est un *idéal de définition* pour F.

Nous utiliserons ensuite le lemme suivant:

LEMME 1.3. *Soit X un A-module injectif. Alors $T_{F(X)}(X)$ est un cogénérateur injectif de $\mathscr{C}(F(X))$.*

Démonstration. En effet, d'après [2, Ch. III, 3, corollaire 2], on déduit que $T_{F(X)}(X)$ est un injectif de $\mathscr{C}(F(X))$. Si Y est un objet de $\mathscr{C}(F(X))$, alors le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(F(X))}(Y, T_{F(X)}(X))$ n'est pas nul selon la définition de $F(X)$. Donc $T_{F(X)}(X)$ est un co-générateur injectif de $\mathscr{C}(F(X))$.

2. LE SPECTRE À GAUCHE D'UN ANNEAU

DÉFINITION 2.1. Soit A un anneau et $F \in \mathscr{G}(A)$; on dit que F est un "premier" à gauche de A si la catégorie $\mathscr{C}(F)$ a un seul type d'objets simples dont l'enveloppe injective est un co-générateur de $\mathscr{C}(F)$.

Soit F un premier à gauche de A; alors $\mathscr{C}(F)$ a un seul type d'objets simples U_F ou U (s'il n'existe pas de danger de confusion); nous notons par Q_F ou Q l'enveloppe injective de U_F ; alors $S_F(Q)$ sera un injectif indécomposable de Mod A [2, Ch. III].

LEMME 2.2. *Soit F un premier à gauche de A. Avec les notations ci-dessus on a*: $F = F(S_F(Q_F))$.

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ la sous-catégorie localisante de Mod A déterminée de F; un module X est dans $\mathscr{F}$ si et seulement $T_F(X) = 0$; donc on a:

$$\mathrm{Hom}_A(X, S_F(Q_F)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(F)}(T_F(X), Q_F) = 0.$$

Inversement, soit Y un A-module tel que $\mathrm{Hom}_A(Y, S_F(Q_F)) = 0$; alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(F)}(T_F(Y), Q_F) = 0$, donc $T_F(Y) = 0$, c'est-à-dire $Y \in \mathscr{F}$.

Le théorème suivant nous permet d'identifier des premiers à gauche pour un anneau A.

THÉORÈME 2.3. *Soit A un anneau, $F \in \mathscr{G}(A)$, X un objet simple de $\mathscr{C}(F)$, $E(X)$ l'enveloppe injective de X et $Q = S_F(E(X))$. Alors $F(Q)$ est un premier à gauche de A.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ la sous-catégorie localisante de $\mathscr{C}(F)$ formée par tous les objets Y tels que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(F)}(Y, E(X)) = 0$. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie quotient de $\mathscr{C}(F)$ par $\mathscr{F}$, $T' : \mathscr{C}(F) \to \mathscr{C}$ le foncteur canonique et S' un adjoint à droite de T'. Évidemment $T'(X)$ est un objet simple de $\mathscr{C}$; d'après le lemme 1.3 on déduit facilement que $T(E(X))$ est un cogénérateur de $\mathscr{C}$. D'autre part, on voit que $\mathscr{C}$ est canoniquement équivalent avec $\mathscr{C}(F(Q))$. Pour finir il faut prouver que $\mathscr{C}$ n'a qu'un type d'objets simples. En effet, si X' est un objet simple de $\mathscr{C}$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', T(E(X))) \neq 0$ donc X' est canoniquement isomorphe à $T(X)$. c.c.t.d.

COROLLAIRE 2.4 (l'existence des premiers à gauche pour tout anneau). *Soit A un anneau et* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal à gauche de A. Alors $F_{\mathfrak{m}}$ est un premier à gauche de A.*

Tout résultera d'après la proposition précédente.

Soit F un premier à gauche pour l'anneau A; U un objet simple de $\mathscr{C}(F)$, E son enveloppe injective et $Q = S_F(E)$; évidemment E et Q sont injectifs indécomposables et $F = F(Q)$. C'est-à-dire F est définie par un injectif indécomposable. Soit Q un injectif indécomposable de Mod A; on dit que Q est un injectif indécomposable premier si $F(Q)$ est un premier à gauche de A.

PROPOSITION 2.5. *Soit Q un injectif indécomposable de* Mod A. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Q est un injectif indécomposable premier*;

(2) *Il existe un élément $F \in \mathscr{G}(A)$ et un objet simple non nul U de $\mathscr{C}(F)$ tel que $Q \simeq S_F(E(U))$ ($E(U)$ l'enveloppe injective de U).*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit U un objet simple de $\mathscr{C}(F(Q))$; alors $T_{F(Q)}(Q)$ est l'enveloppe injective de U, selon le lemme 1.3.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) résultera d'après le théorème 2.2.

COROLLAIRE 2.6. *Soient Q, Q' deux injectifs indécomposables premiers de* Mod A. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) $Q \simeq Q'$;

(2) $F(Q) = F(Q')$.

Tout résultera d'après ci-dessus.

COROLLAIRE 2.7. *Il y a une bijection entre l'ensemble des premiers à gauche de A et l'ensemble des injectifs indécomposables premiers de* Mod A.

Soit Q un injectif indécomposable de Mod A; alors pour tout sous-module non nul X de Q, $F(X) = F(Q)$; particulièrement si x est un élément non nul de Q et $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$, alors $F(Q) = F_{\mathfrak{a}}$, c'est-à-dire $F(Q)$ a toujours un idéal de définition. Particulièrement si F est un premier à gauche pour A, alors F a un idéal de définition. Nous déterminons les idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ de A tels que $F_{\mathfrak{a}}$ est un premier à gauche de A.

THÉORÈME 2.8. *Soit $F \in \mathscr{G}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *F est un premier à gauche de A.*

(2) *Il existe un idéal à gauche $\mathfrak{a}$, de définition pour F tel que si $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche de A ainsi que $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{b} \in F$.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit U un objet simple de $\mathscr{C}(F)$, x un élément non nul de $S_F(U)$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$. Évidemment, $F = F(S_F(U)) = F_{\mathfrak{a}}$. De plus pour tout sous-objet non nul X de $S_F(U)$, on a: $T_F(S_F(U)/X) = 0$. En effet, on utilise la suite exacte:

$$0 \to X \xrightarrow{i} S_F(U) \to S_F(U)/X \to 0$$

où i est l'inclusion canonique; on observe que $T_F(i)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}(F)$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal à gauche de A tel que $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$; alors $X = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ est un sous-objet non nul de $S_F(U)$ et de la suite exacte:

$$0 \to \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{b} \to 0$$

on déduit que $A/\mathfrak{b}$ est isomorphe à un sous-objet de $S_F(U)/\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$; donc $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{b}, Q) = 0$, où Q est l'enveloppe injective de $S_F(U)$ c'est-à-dire $\mathfrak{b} \in F_{\mathfrak{a}} = F$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Nous observons que $\mathfrak{a}$ est un idéal irréductible; en effet, si $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ sont deux idéaux à gauche de A tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_2$, on déduit que $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in F$ et $\mathfrak{a} \in F_{\mathfrak{a}}$; contradiction selon la définition de $F_{\mathfrak{a}}$. Donc $\mathfrak{a}$ est irréductible.

Soit Q l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{a}$; évidemment Q est un injectif indécomposable. Soit $U = T_F(A/\mathfrak{a}) \subset T(Q)$. Évidemment $U \neq 0$; de plus U est simple. En effet si X est un sous-objet propre de X, alors d'après le diagramme suivant, canonique, construit:

$$\begin{array}{c} A/\mathfrak{a} \subseteq S_F(U) \simeq S_F T_F(A/\mathfrak{a}) \\ \cup\!\!| \\ S_F(X) \end{array} \qquad (*)$$

on déduit que $S_F(X) \cap A/\mathfrak{a} = Y \neq 0$ ($S_F(U)$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{a}$ [2, Ch. III, 2]). Donc $Y = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche de A contenant $\mathfrak{a}$ et distinct de $\mathfrak{a}$; on déduit que $\mathfrak{b} \in F$. Mais alors si $i : \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a}$ est l'inclusion canonique, on déduit que $T_F(i)$ est un isomorphisme. Contradiction, selon la définition de X.

Pour finir, on voit que $T_F(Q)$ est un cogénérateur injectif de $\mathscr{C}(F)$, selon le lemme 1.3, donc tout objet simple de $\mathscr{C}(F)$ est isomorphe à U.

Observation. La condition (2) du théorème 2.8 est vérifiée pour un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ si et seulement si pour tout $x, y, z \in A$, tel que $x, z \notin \mathfrak{a}$ il existe $u \in A$ ainsi que $ux \notin \mathfrak{a}$ et $uy \in \mathfrak{a} + Az$. Un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A, vérifiant la condition précédente s'appellera *super-premier* (*à gauche*) et $F_{\mathfrak{a}}$ le *premier à gauche associé.*

COROLLAIRE 2.9. *Soit A un anneau commutatif. Un élément F de $\mathscr{C}(A)$ est alors un premier si et seulement si $F = F_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.*

Démonstration. Soit F un premier de A; alors, conformément au théorème précédent $F = F_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal de A vérifiant la condition (2). Mais selon le corollaire 1.2, on déduit que $\mathfrak{p}$ est premier. Inversement, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}$ et distinct de $\mathfrak{p}$, on déduit que $\mathfrak{a} \in F_{\mathfrak{p}}$, selon le corollaire 1.2; c'est-à-dire $F_{\mathfrak{p}}$ est un premier de A.

On voit que dans un anneau commutatif un idéal est super-premier si et seulement s'il est premier.

Soit F un premier à gauche de A. On considère un objet simple non nul de $\mathscr{C}(F)$, E_F son enveloppe injective, $K_F = S_F(U_F)$ et $Q_F = S_F(E)$; évidemment les objets U_F, E_F, K_F, Q_F sont définis par F à un isomorphisme près. On note de même par k_F le corps $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(F)}(U_F, U_F)$; k_F s'appellera le corps résiduel de F. K_F est considéré comme un sous-objet de Q_F.

THÉORÈME 2.10. *Soit A un anneau et F un élément de $\mathscr{G}(A)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *F est un premier à gauche de A.*

(2) *F a un module de définition X tel que pour tout sous-module X' de X, tout morphisme non nul des A-modules f de X' dans X est un monomorphisme.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $X = K_F$, X' un sous-module de X et $f: X' \to X$ un morphisme des A-modules; si $\operatorname{Ker} f \neq 0$ on déduit que $\operatorname{Im} f$ est un objet de $\mathscr{F}$ en utilisant la suite exacte:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} X \to \operatorname{Im} f \to 0$$

et observant que $T_F(i)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}(F)$ selon la définition de X. Contradiction avec la définition de X; donc $\operatorname{Ker} f = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Nous montrons que X est coirréductible. En effet, si X_1, X_2 sont deux sous-objets non nuls de X, tels que $X_1 \cap X_2 = 0$ alors la somme $X_1 + X_2$ est directe et il y a un morphisme non nul de $X_1 + X_2$ dans X, qui n'est pas un monomorphisme; contradiction.

Soit Q l'enveloppe injective de X. Nous montrons que Q est un injectif indécomposable premier. Pour cela il suffit de montrer que $T_F(X)$ est un objet simple de $\mathscr{C}(F)$, c'est-à-dire pour tout sous-objet non nul X' de X on a: $\operatorname{Hom}_A(X/X', Q) = 0$. En effet, soit X' un sous-objet non nul de X tel qu'il existe un morphisme non nul $f: X/X' \to Q$. Soit $p: X \to X/X'$, le morphisme canonique. Évidemment $\operatorname{Ker}(f \circ p) \supset X'$ et $\operatorname{Im}(f \circ p) \cap X = Z \neq 0$. Alors $Z = (f \circ p)(X_1)$ où X_1 est un sous-objet convenable de X contenant X'.

La restriction de f à X_1/X' définit un morphisme $t: X_1/X' \to Z$. La restriction de p à X_1 définit un morphisme $l: X_1 \to X_1/X'$ et $t \circ l$ est un morphisme de X_1 dans X non nul qui n'est pas un monomorphisme. Contradiction. Tout découle normalement.

COROLLAIRE 2.11 (Goldman [3]). *Soit F un élément de $\mathscr{G}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *F est un premier à gauche de A.*

(2) *F a un module de définition X tel que pour tout sous-module non nul X' de X, on a:* $\operatorname{Hom}_A(X/X', Q) = 0$, *$Q$ étant l'enveloppe injective de X.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il suffit de prouver que (2) $\Rightarrow$ (1). En effet, soit X un A-module vérifiant les conditions de l'énoncé, X' un sous-module non nul de X et $f: X' \to X$ un morphisme non nul des A-modules.

f est un monomorphisme; en effet si $\operatorname{Ker} f \neq 0$, de la suite exacte:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to X' \to \operatorname{Im} f \to 0$$

on déduit que $\operatorname{Hom}_A(\operatorname{Im} f, Q) = 0$; contradiction.

THÉORÈME 2.12. *Soit F un premier à gauche de A, avec les notations ci-dessus on a*:

(1) *k_F est le corps résiduel de l'anneau local* $\operatorname{Hom}_A(Q_F, Q_F)$.

(2) *Pour tout sous-objet non nul X de K_F, l'anneau* $\operatorname{Hom}_A(X, X)$ *est un anneau intègre ayant un corps des quotients à gauche isomorphe à k_F.*

Démonstration. Q_F est injectif indécomposable, donc, $\operatorname{Hom}_A(Q_F, Q_F)$ est un anneau local dont l'idéal maximal est formé par les éléments f tel que $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Soit $f \in \operatorname{Hom}_A(Q_F, Q_F)$, tel que $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Alors $\operatorname{Ker} f \supseteq K_F$. En effet si $X = \operatorname{Ker} f \cap K_F$, alors $X \neq 0$. Si $X \neq K_F$, on déduit que $T_F(K_F/X) = 0$, parce que $T_F(K_F) = U_F$ est simple, et $T_F(i)$ est un isomorphisme. Donc $K_F/X \in \mathscr{F}$, la sous-catégorie localisante associée à F. Contradiction. Donc $X = K_F$.

Soit f un automorphisme de Q_F ; alors $f(K_F) = K_F$. En effet de la suite exacte de $\mathscr{C}(F)$:

$$0 \to U_F \to E_F \to E_F/U_F \to 0$$

on déduit dans Mod A la suite exacte:

$$0 \to K_F \to Q_F \to S_F(E_F/U_F).$$

On déduit d'ici que Q_F/K_F ne contient des sous-objets non nuls de $\mathscr{F}$. Donc si $K_F \not\subseteq f(K_F)$, on déduit comme ci-dessus que $K_F/(K_F \cap f(K_F))$ est dans $\mathscr{F}$; contradiction. Alors $K_F \subseteq f(K_F)$. En raisonnant de manière analogue pour f^{-1} on déduit que $K_F \subseteq f^{-1}(K_F)$; donc $f(K_F) = K_F$.

Si f est un automorphisme de Q_F, nous avons vu que $f(K_F) = K_F$, donc f induit un automorphisme de K_F, noté $\bar{f}$. On voit facilement que l'association $f \mapsto \bar{f}$ est un morphisme des anneaux de l'anneau $\operatorname{Hom}_A(Q_F, Q_F)$ sur l'anneau $\operatorname{Hom}_A(K_F, K_F) = k_F$.

(2) Soit X un sous-objet non nul de K_F et $f \in \operatorname{Hom}_A(X, X)$; il existe alors un morphisme $f' : Q_F \to Q_F$ en prolongeant f; évidemment si $f \neq 0$ on déduit que $\operatorname{Ker} f' = 0$, donc f' est un automorphisme de Q_F ; d'après ci-dessus on déduit que $f'(K_F) = K_F$, donc f' définit un élément $\alpha(f)$ de k_F (on identifie canoniquement $\operatorname{Hom}_A(K_F, K_F)$ avec k_F). Nous montrons que $\alpha(f)$ est uniquement défini par f. En effet si f', f'' sont deux automorphismes de Q_F en prolongeant f, on déduit que $(f' - f'')(K_F) = 0$, donc f' et f''

coïncident sur K_F. On voit facilement que la fonction $f \mapsto \alpha(f)$ est un morphisme des anneaux de $\mathrm{Hom}_A(X, X)$ dans k_F.

Pour finir nous montrons que k_F est le corps des quotients de $\mathrm{Hom}_A(X, X)$ (nous identifierons $\mathrm{Hom}_A(X, X)$ avec l'image de α). Soit pour cela f un élément non nul de k_F et $i : X \to K_F$ l'inclusion canonique. Alors on a le diagramme canonique construit:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ i"] & & K_F \\ & \mathrm{Im}(f \circ i) \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

où j est l'inclusion canonique et t un isomorphisme.

Soit u un isomorphisme de $\mathrm{Im}(f \circ i)$ sur X; alors $u \circ t$ est un endomorphisme de X. On voit facilement que le prolongement de $f \circ i$ à K_F est f et le prolongement de j à K_F est 1_{K_F}; donc le prolongement de t à K_F est f. Soit $v = u \circ t$. Nous pouvons considérer u comme un endomorphisme de X; alors on a: $\alpha(v) = \alpha(u) \circ f$, où $\alpha(v)$, $\alpha(u)$ sont les prolongements de v et u à K_F; évidemment, on a: $f = \alpha(u)^{-1} \circ \alpha(v)$. Le théorème est complètement prouvé.

Soit A un anneau commutatif et $\mathfrak{a}$ un idéal de A; alors $\mathfrak{a}$ est premier si et seulement si $A/\mathfrak{a}$ est un anneau intègre, c'est-à-dire si et seulement si pour tout sous-module X de $A/\mathfrak{a}$, tout non nul morphisme des A-modules de X dans $A/\mathfrak{a}$ est un monomorphisme; la même chose est valable et dans le cas non-commutatif mais sous une forme modifié.

COROLLAIRE 2.13. *Soit $F \in \mathcal{G}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *F est un premier à gauche de A.*

(2) *Il existe un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A de définition pour F, tel que pour tout sous-module X de $A/\mathfrak{a}$ tout non nul morphisme des A-modules de X dans $A/\mathfrak{a}$ est un monomorphisme.*

Tout résultera d'après le théorème 2.11.

Voilà une application immédiate des résultats ci-dessus.

THÉORÈME 2.14. *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L'idéal nul de A est super-premier (à gauche).*

(2) *A est un domaine de Ore à gauche* [5].

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) En effet, conformément au théorème 2.10, on déduit que $\mathrm{Hom}_A(A, A)$ a un corps des quotients à gauche; donc A est un domaine de Ore.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit K le corps des quotients à gauche de A; alors K est l'enveloppe injective de A. Pour finir il suffit de montrer que pour tout idéal à gauche non nul $\mathfrak{a}$ de A, on a: $\mathfrak{a} \in F_0$ (proposition 1.1). En effet soit y un élément non nul de $\mathfrak{a}$, et x_1, x_2 des éléments non nuls de A. Alors il existe des éléments non nuls u, v de A tels que $ux_2 = vy$; évidemment $ux_1 \neq 0$. On peut appliquer la proposition 1.1.

Soit A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A; on note par $B_\mathfrak{a}$ ou B, l'ensemble des éléments x de A tels que $\mathfrak{a}x \subseteq \mathfrak{a}$; évidemment B est un sous-anneau de A, à savoir le plus grand sous-anneau de A dans lequel $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère. On voit facilement que l'anneau quotient $B/\mathfrak{a}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{a})$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A; on dit que $\mathfrak{a}$ est *fort premier* à gauche si l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est un domaine de Ore à gauche.

COROLLAIRE 2.15. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A super-premier. Alors $\mathfrak{a}$ est un idéal fort premier à gauche dans l'anneau $B_\mathfrak{a}$.*

Démonstration. Tout résultera d'après le théorème 2.10.

Soit A un anneau; on note par $\mathrm{Speg}(A)$ l'ensemble des premiers à gauche de A. Nous espérons que $\mathrm{Speg}(A)$ joue le même rôle pour l'anneau A comme $\mathrm{Spec}(A)$ dans le cas commutatif.

3. APPLICATIONS AUX ANNEAUX NOETHÉRIENS

Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche super-premier de A, x un élément de A n'appartenant pas à $\mathfrak{a}$, alors $\{\mathfrak{a} : x\}$ est un idéal à gauche super-premier de A et $F_\mathfrak{a} = F_{\{\mathfrak{a}:x\}}$. Évidemment tout idéal à gauche maximal est super-premier. Soit F un premier à gauche, alors selon le théorème 2.8 il existe un idéal à gauche super-premier de A, de définition pour F; on appellera un tel idéal *associé* à F. Évidemment un premier à gauche de A a en général plusieurs idéaux à gauche super-premiers associés.

Soit A un anneau; nous notons par $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de types des injectifs indécomposables de $\mathrm{Mod}\, A$ [2, Ch. IV]; $\mathrm{Sp}(A)$ s'appellera le *spectre* de $\mathrm{Mod}\, A$. Il existe une injection canonique α de $\mathrm{Speg}(A)$ dans $\mathrm{Sp}(A)$, tel que, pour tout $F \in \mathrm{Speg}(A)$ $\alpha(F) = Q_F$. Nous nous demandons dans quelles conditions cette injection est-elle une surjection, c'est-à-dire une bijection? Voilà une réponse partiale à ce problème.

THÉORÈME 3.1. *Soit A un anneau noethérien à gauche; alors la fonction $\alpha : \mathrm{Speg}(A) \to \mathrm{Sp}(A)$ ci-dessus, est une bijection, c'est-à-dire tout injectif indécomposable est premier.*

Démonstration. Soit Q un injectif indécomposable de Mod A et $F = F(Q)$. Alors la catégorie $\mathscr{C}(F)$ est localement noethérienne [2, Ch. IV] donc elle contient un objet X, noethérien et non nul. Mais X a sous-objets maximaux propres, donc $\mathscr{C}(F)$ a des objets simples non nuls. Soit $Q' = T_F(Q)$; d'après le lemme 1.3 on sait que Q' est un cogénérateur de $\mathscr{C}(F)$; mais Q' est encore un injectif indécomposable et on déduit qu'il contient tout objet simple de $\mathscr{C}(F)$. D'ici résultera que $\mathscr{C}(F)$ n'a qu'un seul type d'objets simples non nuls. Alors F est un premier à gauche, selon la définition 1.1, c'est-à-dire Q est un injectif indécomposable premier de Mod A.

Voilà une application immédiate de ce théorème.

THÉORÈME 3.2 (Théorème d'Akizuki pour le cas non-commutatif). *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *A est un anneau artinien à gauche.*

(2) *A est un anneau noethérien à gauche et tout idéal à gauche super-premier de A est maximal (c'est-à-dire tout premier à gauche de A est maximal).*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Il est classique le fait que tout anneau artinien à gauche est noethérien à gauche [4]. Soit Q un injectif indécomposable de Mod A; alors Q contient un sous-module artinien non nul, donc un simple; on déduit que tout premier à gauche de A à un idéal de définition qui est maximal, c'est-à-dire tout premier à gauche de A est maximal.

(2) $\Rightarrow$ (1) Montrons que tout A-module à gauche sur A contient un simple non nul. Soit X un A-module à gauche non nul; alors $E(X)$ l'enveloppe injective de X est une somme directe des injectifs indécomposables non nuls [2]. Il existe donc un injectif indécomposable Q contenu dans $E(X)$; évidemment $Q \cap X \neq 0$. Mais Q contient un simple non nul U, et $U \cap X \neq 0$; donc $U \subset X$.

Pour tout n naturel nous notons par $\mathfrak{a}_n$ le idéal à gauche de A construit par recurrence tel que:

— $\mathfrak{a}_0$ est le socle de A, c'est-à-dire la somme des idéaux à gauche minimaux de A.

— $\mathfrak{a}_n$ est tel que $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$ est le socle de $A/\mathfrak{a}_{n-1}$. On a alors: $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subset \cdots$. Parce que A est noethérien on déduit qu'il existe un n tel que $\mathfrak{a}_n = A$, en utilisant le fait que tout A-module non nul contient un sous-module simple non nul. Pour finir on observe que $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$ est une somme directe finie des simples. Donc A est un A-module de longueur finie, à savoir artinien.

Soit A un anneau et X un A-module; en suivant Goldman, on dit que X est co-primaire si pour tout sous-module non nul X' de X on a $F(X') = F(X)$, et $F(X)$ est un premier à gauche de A. On dit que $F(X)$ est le premier à gauche associé à X. Voilà la caractérisation des A-modules co-primaires pour un anneau noethérien à gauche.

THÉORÈME 3.3. *Soient A un anneau noethérien à gauche et X un A-module non nul. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *X est co-primaire;*

(2) *$E(X)$, l'enveloppe injective de X est un A-module isotypique (c'est-à-dire une somme directe des modules injectifs indécomposables de même type).*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $F = F(X)$; alors, selon le théorème 3.1 il existe un injectif indécomposable Q tel que $F = F(Q)$. Nous montrons que tout injectif indécomposable contenu dans $E(X)$ est isomorphe à Q. En effet si Q' est un injectif indécomposable contenu dans $E(X)$, alors $F(Q') = F = F(Q)$; alors $Q' \simeq Q$ selon le corollaire 2.6. Évidemment $E(X)$ est isotypique.

(2) $\Rightarrow$ (1) $E(X)$ est une somme directe $\coprod_{i \in I} Q_i$ des injectifs indécomposables de même type, c'est-à-dire $Q_i \simeq Q_j$ pour tout $i, j \in I$. Soit $F = F(Q_i)$; alors $F(X) \leqslant F$. Si $F \neq F(X)$ alors il existe un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{a} \in F$ et $\mathfrak{a} \notin F(X)$; mais alors il existe un morphisme non nul $f : A/\mathfrak{a} \to E(X)$ nous pouvons admettre que $A/\mathfrak{a}$ est un sous-module de $E(X)$; alors il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tel que $(Q_i \coprod \cdots \coprod Q_{i_n}) \cap A/\mathfrak{a} = Y \neq 0$. Alors

$$\mathrm{Hom}_a(Y, \coprod_{j=1}^{n} Q_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(Y, Q_{i_j}) \neq 0;$$

mais selon l'hypothèse $\mathrm{Hom}_A(Y, Q_i) = 0$ pour tout $i \in I$. Contradiction. Donc $F = F(X)$.

Soit X' un sous-objet propre de X; alors $E(X')$ est un injectif isotypique, et tout injectif indécomposable contenu dans $E(X')$ est de même type que Q_i pour n'importe quel $i \in I$. Donc $F(X') = F(Q_i) = F(X)$.

Soit A un anneau noethérien à gauche et $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A; on dit que $\mathfrak{a}$ est primaire à gauche si $A/\mathfrak{a}$ est co-primaire; alors $F_{\mathfrak{a}}$ s'appellera le premier associé de $\mathfrak{a}$, ou "radical" de $\mathfrak{a}$.

Dans [3, théorème 6.11] Goldman a montré que si A est un anneau commutatif noethérien, alors un idéal $\mathfrak{a}$ est (primaire) comme ci-dessus si et seulement s'il est primaire au sens classique [10, Ch. II]. Nous donnons une nouvelle démonstration de ce résultat sans utiliser la théorie de décomposition primaire. Nous faisons d'abord quelques considérations.

Soit A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A; on dit que $\mathfrak{a}$ est F-quasi-primaire si $F = F_{\mathfrak{a}}$ est un premier à gauche de A. Voilà une caractérisation (très incomplète) des idéaux quasi-primaires dans un anneau commutatif.

PROPOSITION 3.4. *Soit A un anneau commutatif et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathfrak{a}$ *est un idéal* $\mathfrak{p}$-*quasi-primaire* ($\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* A).

(2) *Il existe un élément* x *de* A, $x \notin \mathfrak{a}$ *tel que* $\{\mathfrak{a} : x\} = \mathfrak{p}$ *est un idéal premier et de façon que pour tous deux éléments* y, z *de* A *ainsi que* $yz \in \mathfrak{a}$ *et* $y \notin \mathfrak{p}$ *on déduit que* $z \in \mathfrak{a}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $F_{\mathfrak{a}} = F$, F étant un premier de A; alors il existe un unique idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $F = F_{\mathfrak{p}}$ (théorème 2.8). Soit Q l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{a}$, et $U = T_F(A/\mathfrak{p})$; alors U est un objet simple de $\mathscr{C}(F)$. Mais selon le lemme 1.3, $T_F(Q)$ est un cogénérateur de $\mathscr{C}(F)$; donc $U \subset T_F(Q)$. Mais alors $(S_F \circ T_F)(A/\mathfrak{p}) = S_F(U)$ est un sous-objet de $(S_F \circ T_F)(Q) \simeq Q$. Mais $A/\mathfrak{p} \subset (S_F \circ T_F)(A/\mathfrak{p})$, donc $A/\mathfrak{p}$ est canoniquement un sous-objet de Q. Alors $A/\mathfrak{p} \cap A/\mathfrak{a} \neq 0$, et il existe un élément $x \in A$ dont l'image $\bar{x}$ dans $A/\mathfrak{a}$ est non nulle et $\bar{x} \in A/\mathfrak{p}$, c'est-à-dire il existe un élément $y \in A$ dont l'image canonique $\bar{y}$ dans $A/\mathfrak{p}$ est $\bar{x}$. Alors:

$$\operatorname{Ann} \bar{x} = \{\mathfrak{a} : x\} = \operatorname{Ann} y = \{\mathfrak{p} : y\} = \mathfrak{p}.$$

Soit y, z des éléments de A tel que $yz \in \mathfrak{a}$, et $y \notin \mathfrak{p}$; alors Ay, l'idéal engendré de y est dans $F_{\mathfrak{p}} = F$; donc dans $F_{\mathfrak{a}}$; mais $Ayz \subseteq \mathfrak{a}$ et $z \in \mathfrak{a}$ selon le corollaire 1.2.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit x l'image canonique de x dans $A/\mathfrak{a}$; alors $\operatorname{Ann}(x) = \{\mathfrak{a} : x\} = \mathfrak{p}$, donc $A/\mathfrak{p} \subseteq A/\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $F_{\mathfrak{p}} \supseteq F_{\mathfrak{a}}$. Soit $\mathfrak{b} \in F_{\mathfrak{p}}$; alors $\mathfrak{b}$ contient un élément s de A tel que $s \notin \mathfrak{p}$. Soit $y \in A$ tel que $\mathfrak{b}y \subseteq \mathfrak{a}$; alors $sy \in \mathfrak{a}$ et $s \notin \mathfrak{p}$. Donc $y \in \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b} \in F_{\mathfrak{a}}$ selon le corollaire 1.2.

La notion d'idéal quasi-primaire est différente en général de la notion d'idéal primaire au sens classique, mais les deux notions coïncident dans le cas noethérien.

THÉORÈME 3.5. *Soit A un anneau noethérien, commutatif et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathfrak{a}$ *est primaire au sens classique et* $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ (*radical de* $\mathfrak{a}$ [10]).

(2) $\mathfrak{a}$ *est* $\mathfrak{p}$-*quasi-primaire* ($\mathfrak{p}$ *idéal premier de* A).

(3) $A/\mathfrak{a}$ *est co-primaire.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{b} \notin F_{\mathfrak{p}}$; alors $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ et pour un nombre naturel convenable n on a: $\mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{a}$; mais alors $\mathfrak{b} \notin F_{\mathfrak{a}}$ (lemme 1.3). Donc $F_{\mathfrak{a}} \subseteq F_{\mathfrak{p}}$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{b} \notin F_{\mathfrak{a}}$; il existe alors un élément $y \in A$ tel que $y \notin \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}y \subseteq \mathfrak{a}$ (corollaire 1.2). Alors $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b} \notin F_{\mathfrak{p}}$. Donc $F_{\mathfrak{p}} \subseteq F_{\mathfrak{a}}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit Q l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{a}$, et E l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Q étant $F_{\mathfrak{p}} = F$-fermée on déduit que $T_F(Q)$ contient $T_F(A/\mathfrak{p})$ (selon le théorème 2.8, $T_F(A/\mathfrak{p})$ est simple et $T_F(Q)$ est un cogénérateur de $\mathscr{C}(F)$ selon le lemme 1.3). Alors $A/\mathfrak{p} \subset Q$ et $A/\mathfrak{p} \cap A/\mathfrak{a} \neq 0$; il existe donc un élément x de A dont l'image canonique $\bar{x}$ dans $A/\mathfrak{a}$ est non nulle et $\bar{x} \in A/\mathfrak{p}$; c'est-à-dire $\mathrm{Ann}(\bar{x}) = \{\mathfrak{a} : x\} = \mathfrak{p}$. On déduit encore que $E \subseteq Q$. Pour finir il faut prouver que tout injectif indécomposable contenu dans Q est isomorphe à E. En utilisant le théorème 3.1, soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A tel que E' l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{q}$ est contenue dans Q. Alors E' est $F_{\mathfrak{a}}$-fermée donc $T_F(A/\mathfrak{p}) \subseteq T_F(E')$, c'est-à-dire $A/\mathfrak{p} \subseteq E'$. Alors $A/\mathfrak{p} \cap A/\mathfrak{q} \neq 0$, et il existe un élément x de A tel que $\bar{x}$ l'image de x dans $A/\mathfrak{p}$ est non nulle et $\bar{x} \in A/\mathfrak{q}$; alors $\mathrm{Ann}(\bar{x}) = \{\mathfrak{p} : x\} = \mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} : y\} = \mathfrak{q}$, y étant un élément de A, tel que $\bar{y} = \bar{x}$, $\bar{y}$ étant l'image canonique de y dans $A/\mathfrak{q}$. Donc $E' \simeq E$, et Q est isotypique.

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit Q l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{a}$; alors Q est une somme directe des injectifs indécomposables isomorphes à un injectif indécomposable E. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $A/\mathfrak{p} \subseteq E$. On déduit comme ci-dessus que $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{a}$. Pour finir il faut trouver que tout autre idéal premier $\mathfrak{q}$ de A qui contient $\mathfrak{a}$, contient de même $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A tel que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$. Si $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$, alors $\mathfrak{p} \in F_{\mathfrak{q}}$, et $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, E') = 0$, E' étant l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{q}$. Alors on déduit que $A/\mathfrak{p} \in \mathscr{F}_{\mathfrak{q}}$, la sous-catégorie localisante associée à $F_{\mathfrak{q}}$. Mais selon [2, Ch. V, 3], on déduit que $E \in \mathscr{F}_{\mathfrak{q}}$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(E, E') = 0$. Mais alors $\mathrm{Hom}_A(Q, E') = 0$, Q étant E-isotypique. Nous avons obtenu une contradiction avec le fait que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E') \neq 0$. Donc $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Tout résultera d'après [10, Ch. II].

Observations. (1) l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) du théorème ci-dessus est en essence le théorème 6.11 de [3], via le théorème 3.3.

(2) On peut montrer l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) du théorème précédent pour un anneau noethérien à gauche de la même manière que dans la démonstration précédente.

(3) Soit A un anneau noethérien à gauche et $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A, irréductible; alors $A/\mathfrak{a}$ est co-irréductible, c'est-à-dire coprimaire; donc $\mathfrak{a}$ est primaire. On peut faire une théorie de décomposition pour les idéaux à gauche de l'anneau A, qui est une généralisation naturelle de la théorie de décomposition de Lasker–Noether pour le cas commutatif; ici les premiers associés à un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ sont des premiers à gauche de A et ils ne dépendent que de $\mathfrak{a}$.

Nous laissons au soin du lecteur de faire la théorie de décomposition en suivant la théorie générale de la décomposition [8] et d'établir la liaison avec la théorie tertiaire de décomposition de [2], [6].

BIBLIOGRAPHIE

1. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," ch. III-IV, Paris, Hermann, 1961.
2. P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 326–448.
3. O. GOLDMAN, Rings on modules of quotients, *J. Algebra* **13** (1969), 10–47.
4. N. JACOBSON, The theory of rings, *in* "Mathematical Surveys," Number II, American Math. Society, Providence, R. I., 1943.
5. J. LAMBEK, "Lectures on Rings and Modules," Blaisdell Publishing Company, 1967.
6. L. LESIEUR AND R. CROISOT, "Algèbre noethérienne non-commutative," Gauthier-Villars, Paris, 1963.
7. C. NĂSTĂSESCU AND N. POPESCU, Anneaux semi-artésiens, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 357–368.
8. N. POPESCU, Théorie générale de la décomposition, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **XII** (1967), 1365–1371.
9. N. POPESCU AND T. SPIRCU, Quelques observations sur les épimorphismes plats (à gauche) des anneaux, *J. Algebra*, à paraître.
10. P. SAMUEL AND O. ZARISKY, "Commutative Algebra," Vol. I, D. Van Nostrand Company, Inc., 1958.